Princípio da Indução Matemática

O Princípio da Indução Matemática é utilizado quando queremos mostrar que uma certa afirmação, que chamamos também de proposição ou sentença, $P(n)$, é verdadeira para todo número n natural.

Princípio da Indução Matemática:
Suponha que uma certa proposição $P(n)$ é tal que:

1. $P(1)$ é verdadeira;
2. Para cada $n \in N$, se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n + 1)$ é verdadeira.

Então, conclui-se que $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n.

O passo 1 é chamado de *passo base* e o passo 2 é chamado de *passo indutivo*. Assumir que $P(n)$ seja verdadeira é chamada de *hipótese de indução*.

Por exemplo, vamos usar indução para provar que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2. Nesse caso a proposição dada é

$$P(n): 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Prova por indução:
1. Para $n = 1$, temos que a proposição é obviamente verdadeira.
2. Supondo a proposição verdadeira para um certo valor de n, vamos mostrar que ela é verdadeira também para $n + 1$. Pela hipótese de indução, temos $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2$. O próximo número ímpar é $2(n + 1) - 1 = 2n + 1$. Somando isso em ambos os lados da igualdade $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2$, temos $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$ e, portanto, a proposição é verdadeira para $n + 1$.

Fica então provado, por indução, que $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2$ para todo $n \in N$.

Em alguns casos, a proposição é verdadeira para os números naturais n maiores do que ou iguais a um certo número natural a. Neste caso, ao invés de tomar o passo base em $n = 1$, tomamos em $n = a$. O passo indutivo é feito considerando como hipótese de indução que a proposição é verdadeira para um certo $n \geq a$:

1. Passo base: Prova-se que a proposição é verdadeira para $n = a$, ou seja, que $P(a)$ é verdadeira.
2. Passo indutivo: supondo que $P(n)$ é verdadeira, para algum $n \geq a$, prova-se que $P(n + 1)$ é verdadeira.

Fica, assim, provado que a proposição vale para todo número natural $n \geq a$.

Princípio da Indução Completa

Em alguns casos em que queremos provar a validade de uma proposição $P(n)$ para todo $n \geq a$, sendo a um número natural, pode ser que para conseguirmos concluir que $P(n+1)$ é verdadeira precisamos, na hipótese de indução, não apenas supor que $P(n)$ seja verdadeira, mas sim que $P(k)$ seja verdadeira para todo $k \in N$, com $a \leq k \leq n$. O Princípio da Indução Completa garante que isso pode ser feito para, então, concluir a validade de $P(n)$, para todo $n \in N$, com $n \geq a$.

Princípio da Indução Completa:
Suponha que uma certa proposição $P(n)$ seja tal que:

1. $P(a)$ é verdadeira, para um certo número natural a;
2. Para cada $n \in N$, com $n \geq a$, se $P(k)$ é verdadeira, para todo $k \in N$, com $a \leq k \leq n$, então $P(n+1)$ é verdadeira.

Então, conclui-se que $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n, com $n \geq a$.

Exemplo: Um número natural $p > 1$ é *primo* quando seus únicos divisores naturais são 1 e o próprio p. Mostre que todo número natural $n \geq 2$ possui algum divisor primo.
Seja $P(n)$ a proposição "n possui um divisor primo". Vamos mostrar que $P(n)$ é verdadeira para todo número natural $n \geq 2$. Vamos fazer isso usando Indução Completa.

1. Como 2 é um número primo e 2 é divisor de si mesmo, segue que a proposição é verdadeira para $n = 2$.
2. Seja $n \in N$, com $n \geq 2$, e suponhamos que todo natural k, com $2 \leq k \leq n$, possua um divisor primo. Vamos verificar que $n+1$ possui um divisor primo. Se $n+1$ for um número primo, basta tomar ele mesmo como seu divisor e a proposição é verdadeira. Caso contrário, existe um número natural m, com $2 \leq m \leq n$, tal que m é divisor de $n+1$, ou seja, $n+1 = mq$, para algum número natural q. Por hipótese de indução, existe um número primo p que é divisor de m, ou seja, $m = pr$, para algum número natural r. Segue, então, que $n+1 = prq$ e, portanto, o número primo p é divisor de $n+1$.

Fica, então, provado que todo número natural $n \geq 2$ possui algum divisor primo.

Princípio da Casa dos Pombos

O Princípio da Casa dos Pombos é um dos nomes dado ao seguinte fato, bastante intuitivo, que provaremos usando o Princípio da Indução Matemática:

Teorema: Queremos colocar m pombos em n casas. Se $m > n$, então dois pombos ficarão na mesma casa.

Antes de provarmos este resultado, vejamos um exemplo simples de sua aplicação.

Exemplo: Em um grupo de 8 pessoas, prove que pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo dia da semana.

Solução: Para usar o Princípio da Casa dos Pombos, precisamos sempre definir o que são as casas, o que são os pombos e como colocar cada pombo em uma casa. Neste exemplo, as casas são os dias da semana e os pombos são as pessoas. Cada pombo será colocado na casa referente ao dia da semana no qual ele faz aniversário. Como temos 8 pombos e apenas 7 casas, dois pombos ficarão na mesma casa, o que significa que duas pessoas fazem aniversário no mesmo dia da semana.

Demonstração do Princípio da Casa dos Pombos:
Vamos provar este resultado por indução sobre o número n de casas. Para $n = 1$, o resultado é óbvio pois, se temos mais de um pombo e uma só casa, teremos que acomodar nesta casa mais de um pombo. Suponha, então, que o resultado seja válido para um certo número n de casas e consideremos a situação de termos $n + 1$ casas e $m > n + 1$ pombos. Queremos mostrar que o resultado vale também neste caso para aplicar o Princípio da Indução Matemática e, assim, concluir que o resultado vale para todo número natural n. Depois de acomodar todos os pombos nas $n + 1$ casas, escolha uma casa ao acaso. Se nesta casa há mais de um pombo, não há mais nada a fazer. Se nesta casa não há nenhum pombo, nas n casas restantes estão acomodados $m > n + 1 > n$ pombos, o que, pela hipótese de indução, acarreta que em uma dessas casas há mais de um pombo. Se nacasa escolhida há um único pombo, então nas n casas restantes estão distribuídos $m - 1 > n$ pombos, o que, novamente, pela hipótese de indução, acarreta que em uma dessas casas há mais de um pombo.

Exercício 1:
Use indução para provar que para todo número natural n valem as igualdades:

a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots n)^2$.

Exercício 2:

Se A é um conjunto finito com n elementos, mostre que A possui 2^n subconjuntos.

Exercício 3:

Verifique que é possível obter qualquer valor de postagem de 18 centavos ou mais usando apenas selos de 7 e 4 centavos.

Exercício 4:

São escolhidos 26 números dentre os números $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 50$. Prove que existem dois deles cuja diferença é igual a 1.

Exercício 5:

Prove que todo número natural n pode ser representado como soma de diversas potências distintas de 2.

Exercício 6:

Demonstre que, para todo n natural, tem-se $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} < 2$, sendo n o número de radicais.

Exercício 7:

Prove que uma soma arbitrária de n centavos, com $n \geq 8$, pode ser paga com moedas de 3 e 5 centavos (tendo essas moedas em quantidade suficiente).

Exercício 8:

Sejam a e b números reais distintos. Demonstre que $a - b$ é divisor de $a^n - b^n$, para qualquer n natural.

(*Sugestão*: Use a identidade $a^n - b^n = (a^{n-1} - b^{n-1})(a + b) - ab(a^{n-2} - b^{n-2})$.

Exercício 9:

Prove que todo número natural n maior ou igual a 2 pode ser expresso como um produto de números primos.

Exercício 10:
Prove que dados sete números naturais, existem dois cuja soma ou a diferença é um múltiplo de dez.

Exercício 11:
São escolhidos 26 números naturais entre os números $1, 2, 3,..., 50$. Prove que, qualquer que seja a escolha, existem dois números dentre os escolhidos tal que um deles é um múltiplo do outro.
(*Sugestão*: use que todo número natural se escreve de forma única como $2^m(2n + 1)$, sendo m e n números inteiros maiores do que ou iguais a zero).

Exercício 12:
Tem-se uma quantidade k de moedas idênticas, mas uma delas é mais pesada do que as demais, sendo as demais todas de mesmo peso. Deseja-se identificar a moeda mais pesada utilizando uma balança de dois pratos. Mostre que se $3^{n-1} < k \leq 3^n$, sendo n um número natural, então n pesagens são suficientes para identificar a moeda falsa.

SOLUÇÕES

Solução do Exercício 1:

a) Para $n = 1$, temos $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ e, portanto, a igualdade é verdadeira.

Supondo a igualdade verdadeira para n, temos $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Adicionando $n + 1$ em cada lado da igualdade precedente, obtemos

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)+2n+2}{2} =$$

$$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Portanto, a igualdade é verdadeira para todo n natural.

b) Primeiro vamos verificar que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Para $n = 1$, a igualdade é facilmente verificada.

Supondo a igualdade verdadeira para n, temos

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$. Queremos mostrar que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n + 1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2.$$

Adicionando $n + 1$ a ambos os membros da igualdade precedente, temos

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n + 1)^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n + 1)^3 =$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n + 1)(n + 1)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)(n+1)^2}{4} =$$

$$= \frac{[n^2+4(n+1)](n+1)^2}{4} = \frac{(n+2)^2(n+1)^2}{4} = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2.$$

Provamos, então que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$, para qualquer número natural n.

Pelo item (a), sabemos que $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ e, logo,

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$, para todo n natural.

Solução do Exercício 2:

Se A é o conjunto vazio, ou seja, $n = 0$, então o único subconjunto de A é também o conjunto vazio e, portanto, A possui $1 = 2^0$ subconjunto, sendo verdadeira a afirmação. É fácil também analisar o caso $n = 1$, pois, neste caso, A possui como subconjuntos o conjunto vazio e o próprio A e, assim, A possui $2 = 2^1$ subconjuntos.

Assumindo agora que qualquer conjunto com n elementos possui 2^n subconjuntos, vamos verificar que qualquer conjunto com $n + 1$ elementos possui 2^{n+1} subconjuntos. Seja A um conjunto com $n + 1$ elementos. Retirando de A um elemento a obtemos o subconjunto $B = A - \{a\}$ de A.

Vamos dividir os subconjuntos de A em dois grupos:

1. Os subconjuntos que não possuem o elemento a:

Se um subconjunto de A não possui o elemento a, ele é também subconjunto de B, e, reciprocamente, todo subconjunto de B é um subconjunto de A que não possui o elemento a. Assim, os subconjuntos de A que não possuem o elemento a são os subconjuntos de B e, pela hipótese de indução, temos 2^n subconjuntos neste grupo.

2. Os subconjuntos que possuem o elemento a:
   Tomando um subconjunto de A que não possui o elemento a e adicionando este elemento nele, obtemos um subconjunto de A que possui o elemento a. Por outro lado, qualquer subconjunto de A que tem a como elemento é a união de um subconjunto de A que não possui o elemento a com $\{a\}$. Assim, a quantidade de subconjuntos de A que possuem o elemento a é igual à quantidade de subconjuntos de A que não possuem o elemento a, sendo igual a 2^n.

Os dois grupos acima são disjuntos, isto é, nenhum subconjunto de A pertence a ambos os grupos. Assim, a quantidade de subconjuntos de A é a soma da quantidade de subconjuntos nos dois grupos, ou seja, é igual a $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ e, portanto, está verificada a afirmação para um conjunto com $n + 1$ elementos.

Solução do Exercício 3:

Vamos provar inicialmente que é possível para qualquer valor p inteiro, com $18 \leq p \leq 21$. Para qualquer um desses valores, basta fazer a combinação de selos dada pela tabela abaixo:

p	Selos
18	$7+7+4$
19	$7+4+4+4$
20	$4+4+4+4+4$
21	$7+7+7$

Vamos supor que para todos inteiros p, com $18 \leq p < k$, p seja um valor de postagem que pode ser obtido apenas com selos de 4 e 7 centavos. Vamos provar que a proposição também é verdadeira para k.

Pela tabela acima, basta considerar $k \geq 22$ e, então, $k - 4 \geq 18$. A hipótese de indução nos diz que podemos obter o valor de postagem $k - 4$ usando selos de 4 e 7 centavos e, então, para obter o valor de postagem k, basta adicionar um selo de 4 centavos.

Solução do Exercício 4:

Formamos casas $C_{1,2} = \{1,\ 2\}$, $C_{3,4} = \{3,\ 4\}$, ..., $C_{49,50} = \{49,\ 50\}$, sendo cada casa formada por pares de números consecutivos, utilizando todos os números de 1 até 50 sem repetir nenhum número. Temos assim, 25 casas. Agora, coloque cada um dos 26 números na casa onde ele figura no par de índices. Como temos 26 números e apenas 25 casas, dois números ficarão na mesma casa e, portanto, dois dos 26 números são consecutivos, e a diferença entre eles é igual a 1.

Solução do Exercício 5:

Se $n = 1$, então $n = 1 = 2^0$ e a proposição é claramente verdade.

Tomemos, agora, um número natural $n > 1$ e suponha que, para todo k natural, $1 \leq k < n$, tem-se que k pode ser escrito como soma de potências distintas de 2. Vamos então provar que n pode ser escrito como soma de potências distintas de 2 . Se n é uma potência de 2, não há nada o que fazer. Caso contrário, tome m natural tal que $2^m < n < 2^{m+1}$. A diferença $d = n - 2^m$ é tal que $d < n$ e $d < 2^m$, pois $d < 2^{m+1} - 2^m = 2^m$. Por hipótese de indução, d pode ser representado por uma soma de potências distintas de 2 e, por ser $d < 2^m$, todas essas potências são distintas de 2^m. Como $n = 2^m + d$, então n também pode ser representado por uma soma de potências distintas de 2.

Solução do Exercício 6:

Se $n = 1$, tem-se $\sqrt{2} < 2$, sendo verdadeira a desigualdade.

Suponhamos a desigualdade verdadeira para um certo n natural e tomemos, agora, a expressão $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots\sqrt{2}}}}$, com $n + 1$ radicais. Aplicando a hipótese de indução nos n radicais internos ao radical mais externo, obtemos $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots\sqrt{2}}}} < \sqrt{2 + 2} = 2$ e, logo, a desigualdade é verdadeira para uma quantidade de $n + 1$ radicais. Segue, por indução, que a desigualdade é verdadeira para qualquer quantidade n de radicais.

Solução do Exercício 7:

Como $8 = 3 + 5$, então a operação é possível para 8. Suponha que uma soma de $n \geq 8$ centavos possa ser paga com moedas de 3 e 5 centavos. Então, será necessário provar que uma soma de $n + 1$ centavos pode ser paga dessa maneira. Se a soma de n centavos foi paga com o uso de moedas de 5 centavos, substitua uma moeda de 5 centavos por duas de 3 centavos e a quantia final será de $n + 1$ centavos. Caso contrário, a soma de n centavos foi paga somente com moedas de 3 centavos e, como $n \geq 8$, há ao menos três moedas de 3 centavos. Troque, então, três moedas de 3 centavos por duas de 5 centavos e, novamente, a quantia final desejada de $n + 1$ centavos foi obtida.

Solução do Exercício 8:

Se $n = 1$, tem-se a igualdade das duas expressões e, portanto, a validade da proposição.

Suponhamos então que $a - b$ divide $a^k - b^k$, para todo $k \in N$, com $1 \leq k \leq n$. Queremos mostrar que $a - b$ divide $a^{n+1} - b^{n+1}$. Pela hipótese de indução, segue que $a - b$ divide $a^n - b^n$ e $a - b$ divide $a^{n-1} - b^{n-1}$ e, então, existem números inteiros q_1 e q_2 tais que $a^n - b^n = (a - b)q_1$ e $a^{n-1} - b^{n-1} = (a - b)q_2$. Assim,

$$a^{n+1} - b^{n+1} = \left(a^n - b^n\right)(a + b) - ab\left(a^{n-1} - b^{n-1}\right) =$$

$$= (a - b)q_1(a + b) - ab(a - b)q_2 = (a - b)\left[q_1(a + b) - abq_2\right],$$

sendo $q_1(a + b) - abq_2$ um número inteiro. Portanto, $a - b$ divide $a^{n+1} - b^{n+1}$.

Solução do Exercício 9:

Se $n = 2$, então a proposição é verdadeira, visto que 2 é um número primo.

Suponhamos a proposição verdadeira, para todo número natural k, com $2 \leq k \leq n$, e vamos mostrar que é verdadeira para $n + 1$.

Se $n + 1$ é um número primo, então a proposição é trivialmente verdadeira. Se $n + 1$ não é um número primo, então existem números naturais a e b, com $1 < a < n + 1$ e $1 < b < n + 1$ tais que $n + 1 = a \bullet b$. Pela hipótese de indução, a e b podem ser expressos como produtos de números primos. Assim, existem números primos $p_1, p_2, \ldots, p_s, q_1, q_2, \ldots, q_r$ tais que $a = p_1 \bullet p_2 \cdot \ldots \cdot p_s$ e

$b = q_1 \bullet q_2 \cdots q_r$. Logo, $n + 1 = a \bullet b = p_1 \bullet p_2 \cdots p_s q_1 \bullet q_2 \cdots q_r$ e a proposição é, então, verdadeira para $n + 1$. Segue, por indução, que qualquer número natural maior ou igual a 2 pode ser escrito como um produto de números primos.

Solução do Exercício 10:

Vamos utilizar o Princípio da Casa dos Pombos.

Vamos montar seis casas C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 e C_5. Colocamos o número n na casa i se o algarismo das unidades de n for igual a i ou se o algarismo das unidades de n for igual a $10 - i$. Por exemplo, o número 14 iria para a casa C_4, assim como o número 16.

Como temos sete números e apenas seis casas, existirão dois números na mesma casa. Se ambos tiverem o algarismo das unidades iguais, então a diferença entre eles será um múltiplo de 10. Caso contrário, um terá o algarismo das unidades igual a i e o outro terá o algarismo das unidades igual a $10 - i$ e, então, a soma deles será múltiplo de 10.

Solução do Exercício 11:

Cada número natural é da forma $2^m(2n + 1)$, sendo m e n números inteiros não negativos. Sendo $2n + 1 \leq 50$, temos $n \in \{0, 1, 2, ..., 24\}$, ou seja, há no máximo 25 possibilidades para o número n. Como foram escolhidos 26 números, pelo Princípio da Casa dos Pombos, haverá 2 números dentre os escolhidos que possuem a mesma parte ímpar em suas fatorações. Esses números são da forma $x = 2^{m'}(2n + 1)$ e $y = 2^m(2n + 1)$, com $m' \neq m$. Supondo $m' > m$ e, sendo $r = m' - m$, temos, então, $x = 2^r y$.

Solução do Exercício 12:

Vamos proceder por indução sobre n.

Se $n = 1$, então $3^{n-1} < k \leq 3^n \Leftrightarrow 1 < k \leq 3$ e temos que k pode ser igual a 2 ou 3. Se $k = 2$, colocando uma moeda em cada prato identifica-se a mais pesada. Se $k = 3$, coloque uma moeda em cada prato da balança e deixe uma moeda fora da primeira pesagem. Se os pratos ficarem equilibrados, a mais pesada é a que está de fora. Caso contrário, a balança irá mostrar qual é a mais pesada. Assim, uma pesagem é suficiente, sendo a proposição verdadeira para $n = 1$.

Suponha agora que l pesagens sejam suficientes se tivermos k moedas, com $3^{l-1} < k \leq 3^l$ e $1 \leq l \leq n$. Queremos mostrar que $n + 1$ pesagens são suficientes se tivermos k moedas, $3^n < k \leq 3^{n+1}$.

No caso de termos k moedas, com $3^n < k \leq 3^{n+1}$, podemos dividir a quantidade de moedas em 3 grupos, sendo que dois deles têm a mesma quantidade m de moedas e o outro grupo ou tem m moedas (no caso de k ser múltiplo de 3) ou tem $m + 1$ moedas (no caso de k deixar resto 1 quando dividido por 3) ou tem $m - 1$ moedas (no caso de k deixar resto 2 quando dividido por 3). Isso significa que é sempre possível dividir a quantidade de moedas em 3 grupos, sendo que dois grupos têm a mesma quantidade e o terceiro grupo difere no máximo por uma moeda. Para cada k, com $3^n < k \leq 3^{n+1}$, a quantidade de moedas em cada grupo ($m - 1$, m ou $m + 1$) será sempre menor do que 3^n.

Façamos a primeira pesagem, colocando em cada um dos pratos um dos grupos que possuem a mesma quantidade de moedas. Se os pratos ficarem equilibrados é porque a moeda mais pesada está no grupo que ficou fora da primeira pesagem. Se os pratos não ficarem equilibrados, então a moeda mais pesada está no prato que ficar mais para baixo. Em qualquer um desses dois casos, após a primeira pesagem, caímos no caso de identificar a moeda mais pesada em meio a uma quantidade menor ou igual a 3^n moedas e, portanto, por hipótese de indução, mais n pesagens são suficientes para identificar a moeda mais pesada. Assim, conseguimos identificar a moeda mais pesada com $n + 1$ pesagens sempre que tivermos k moedas, com $3^n < k \leq 3^{n+1}$.